注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
Individual Contest

1. Nine cards are numbered from 1 to 9 respectively. Two cards are distributed to each of four children. The sum of the numbers on the two cards the children are given is: 7 for Ann, 10 for Ben, 11 for Cathy and 12 for Don. What is the number on the card that was not distributed?

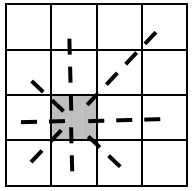
2. Given A, B, C and D are distinct digits and

$$\begin{array}{rccccc} & A & A & B & C & D \\ - & D & A & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 3 & D \end{array}$$

Find $A + B + C + D$.

3. A car traveled from Town A to Town B at an average speed of 100 km/h. It then traveled from Town B to Town C at an average speed of 75 km/h. Given that the distance from Town A to Town B is twice the distance from Town B to Town C, find the car's average speed, in km/h, for the entire journey.

4. In your answer sheet, there is a 4 × 4 board. Shade 4 of the 16 squares so that no two shaded squares lie on the same vertical, horizontal or diagonal path. Below is an illustration of the paths.



5. Find the sum of all the digits in the integers from 1 to 2013.

6. What is the 2013th term in the sequence $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$?

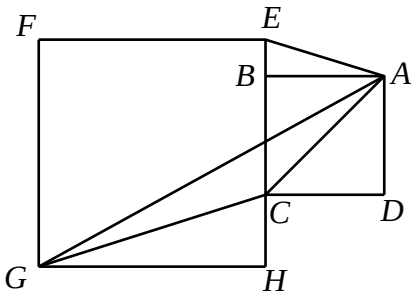
7. All the perfect square numbers are written in order in a line: 14916253649… Which digit falls in the 100th place?

8. A team of four children are to be chosen from 3 girls and 6 boys. There must be at least one girl in the team. How many different teams of 4 are possible?

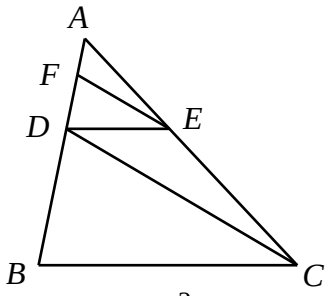
9. The sum of 13 distinct positive integers is 2013. What is the maximum value of the smallest integer?

10. Four teams participated in a soccer tournament. Each team played against all other teams exactly once. Three points were awarded for a win, one point for a draw and no points for a loss. At the end of the tournament, the four teams have obtained 5, 1, x and 6 points respectively. Find the value of x.

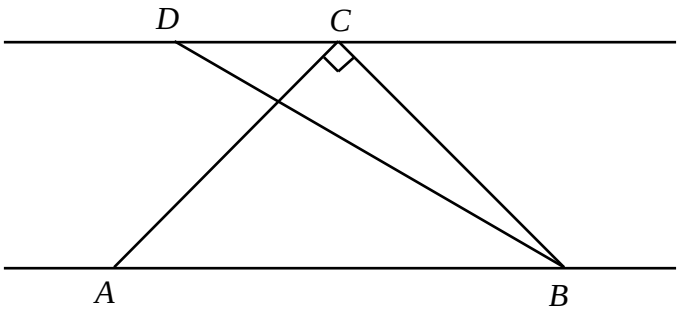
11. In the figure below, $ABCD$ and $EFGH$ are squares and side BC is on the line EH. The area of $ABCD$ is 121 cm^2 and the area of $EFGH$ is 441 cm^2. If the area of triangle AGC is 82.5 cm^2, what is the area of triangle ABE, in cm^2?



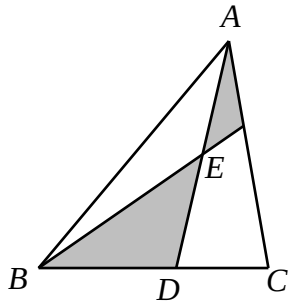
12. In triangle ABC below, DE//BC and FE//DC. If AF = 4 and FD =6, find DB.



13. In the diagram below, AB // DC, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC$ and $AB = DB$. Find $\angle CBD$, in degrees.



14. In the diagram below, the area of triangle ABC is 32 cm^2. Given that $2BD = 3CD$ and $AE = DE$, find the area of the shaded region, in cm^2.



15. Given that $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = M$ and $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = K$, find the ratio of M : K.

Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
第 16 屆小學數學世界邀請賽個人競賽試題

1. 在九張卡片分別不重複地寫上數 1～9，然後將它分發給四位小孩，每人各二張，而剩下一張卡片。這四位小孩分得的二張卡片之和分別是 7、10、11、12。請問剩下的這張卡片上的數是什麼？

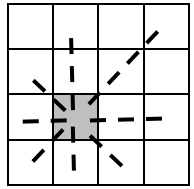
2. 在以下算式中 A、B、C、D 代表不同的數碼。

$$\begin{array}{rcccccc} & A & A & B & C & D \\ - & D & A & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 3 & D \end{array}$$

請問 $A + B + C + D$ 之值是什麼？

3. 一輛汽車以 100 km/h 的勻速從 A 城行駛到 B 城後，再以 75 km/h 的勻速從 B 城繼續行駛到 C 城。已知 A 城到 B 城之間的距離是 B 城到 C 城距離的兩倍，請問這整個行程裡汽車的平均速度是多少 km/h？

4. 在您的答案卷上有一個 4×4 的方格表。請將 16 個小方格中的 4 個小方格塗上陰影，使得任意兩個塗陰影的小方格都不在同一行、同一列或同一斜對角的路徑上。以下是這些路徑的例子。



5. 請問從 1 到 2013 所有整數的數碼總和是多少？

6. 請問在數列 $\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、… 中的第 2013 項是什麼？

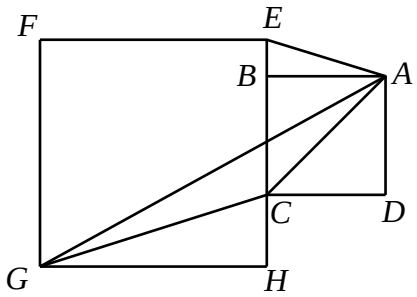
7. 依序將所有完全平方數寫成一列：14916253649…。請問第 100 位上的數碼是什麼？

8. 從 3 位女孩、6 位男孩中挑選出四位，其中至少要有一位女孩。請問共有多少種不同的挑選方法？

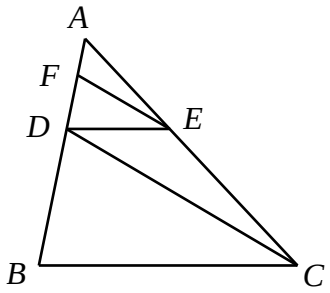
9. 十三個相異正整數的總和是 2013。請問滿足上述條件的所有最小的數中的最大值是什麼？

10. 四支隊伍參加足球賽，任意兩支隊伍都恰比賽一場，贏的隊伍得三分、平手的兩隊各得一分、輸的隊伍得零分。比賽最終結果這四支隊伍各得到 5、1、x、6 分，請問 x 之值是什麼？

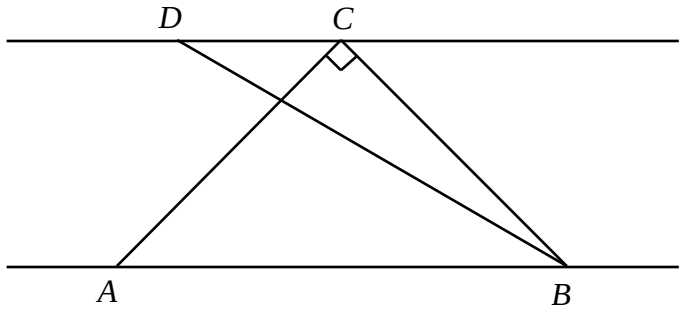
11. 在下圖中，$ABCD$ 與 $EFGH$ 都是正方形，邊 BC 在邊 EH 上，$ABCD$ 的面積為 121 cm^2 且 $EFGH$ 的面積為 441 cm^2。若已知三角形 AGC 的面積為 82.5 cm^2，請問三角形 ABE 的面積為多少 cm^2？



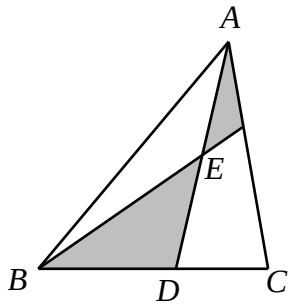
12. 在下圖的三角形中，$DE//BC$ 且 $FE//DC$。若 $AF = 4$ 且 $FD = 6$，請問 DB 的長度為何？



13. 在下圖中，$AB//CD$、$\angle ACB = 90°$、$AC = BC$ 且 $AB = DB$。請問 $\angle CBD$ 為多少度？



14. 在下圖中，三角形 ABC 的面積為 32 cm^2。已知 $2BD = 3CD$ 且 $AE = DE$，請問塗上陰影部份的面積之總和為多少 cm^2？



15. 已知 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=M$ 且 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=K$，請問 M：K 等於什麼？

Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
第 16 屆小學數學世界邀請賽個人競賽試題詳解

1. 在九張卡片分別不重複地寫上數 1～9，然後將它分發給四位小孩，每人各二張，而剩下一張卡片。這四位小孩分得的二張卡片之和分別是 7、10、11、12。請問剩下的這張卡片上的數是什麼？

【解】

可知九張卡片上的數之總和為 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45，而四位小孩分得的卡片上的數之總和為 7 + 10 + 11 + 12 = 40，故可得知剩下的卡片上的數為 45－40 = 5。此時四位小孩所分得的卡片可分別為 1 和 6、2 和 8、4 和 7、3 和 9。

答：5

2. 在以下算式中 A、B、C、D 代表不同的數碼。

$$\begin{array}{rrrrrr} & A & A & B & C & D \\ - & D & A & A & B & C \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 3 & D \end{array}$$

請問 $A + B + C + D$ 之值是什麼？

【解】

由個位數可判斷出 $C = 0$，接著由十位數可判斷出 $B = 7$ 且在此算式中，有向百位數借位 1，故可再進一步得知 $A = 5$，最後即可得知 $D = 3$。故此算式如右所示，而所求之 $A + B + C + D = 5 + 7 + 0 + 3 = 15$。

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5 & 5 & 7 & 0 & 3 \\ - & 3 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

答：15

3. 一輛汽車以 100 km/h 的勻速從 A 城行駛到 B 城後，再以 75 km/h 的勻速從 B 城繼續行駛到 C 城。已知 A 城到 B 城之間的距離是 B 城到 C 城距離的兩倍，請問這整個行程裡汽車的平均速度是多少 km/h？

【解 1】

不妨令 B 城到 C 城的距離為 a，則 A 城到 B 城的距離為 $2a$ 且此汽車從 A 城行駛到 B 城共花費 $\frac{2a}{100} = \frac{a}{50}$ 小時、從 B 城行駛到 C 城共花費 $\frac{a}{75}$ 小時，因此整個行程的平均速度為

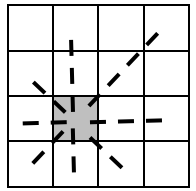
$$\frac{2a+a}{\frac{a}{50}+\frac{a}{75}} = \frac{3}{\frac{3+2}{150}} = 90 \text{ km/h}。$$

【解 2】

令此汽車從 B 城到 C 城行駛 $2t$ 小時，則 B 城到 C 城的距離為 150t km，故知 A 城到 B 城之間的距離為 $300t$ km，此汽車從 A 城行駛到 B 城共花費 $3t$ 小時。因此整個行程的平均速度為 $(150t + 300t) \div (2t+3t) = 90$ km/h。

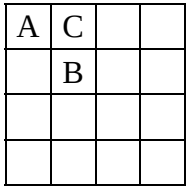
答：90 km/h

4. 在您的答案卷上有一個 4 × 4 的方格表。請將 16 個小方格中的 4 個小方格塗上陰影，使得任意兩個塗陰影的小方格都不在同一行、同一列或同一斜對角的路徑上。以下是這些路徑的例子。



【解】

由對稱性可判斷出只需考慮圖中標記上 A、B、C 這三個方格是否可塗上陰影。



若是 A 可塗上陰影，則接下來僅能在下圖中的空白格子塗上陰影：

A	X	X	X
X	X		
X		X	
X			X

此時無論將哪一個空白格子塗上陰影，都無法完成如題目所要求的找出四個格子來塗上陰影，故 A 不可塗上陰影；
若是 B 可塗上陰影，則接下來僅能在下圖中的空白格子塗上陰影：

X	X	X	
X	B	X	X
X	X	X	
	X		X

此時無論將哪一個空白格子塗上陰影，都無法完成如題目所要求的找出四個格子來塗上陰影，故 B 不可塗上陰影；
若是 C 可塗上陰影，則接下來僅能在下圖中的空白格子塗上陰影：

X	C	X	X
X	X	X	
	X		X
	X		

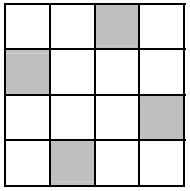
此時可立即判斷出需如下圖所示塗上陰影：

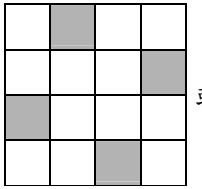
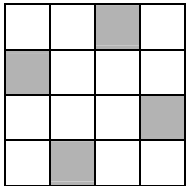
X	C	X	X
X	X	X	
	X	X	X
	X		X

接著，第一行與第四列只能有個小方格塗上陰影，故可再判斷出須如下圖所示的將四個小方格塗上陰影：

X	C	X	X
X	X	X	
	X	X	X
X	X		X

由對稱性可得另一塗色方式：



答：
或


5. 請問從 1 到 2013 所有整數的數碼總和是多少？

【解】

先觀察 1 到 1999。可知 1 到 1999 中，千位數共有 1000 個 1，故其和為 1000；百位數 1 至 9 各有 200 個，故其和為(1 + 2 + 3 + … + 9) × 200 = 9000；十位數 1 至 9 各有 200 個，故其和為(1 + 2 + 3 + … + 9) × 200 = 9000；個位數 1 至 9 各有 200 個，故其和為(1 + 2 + 3 + … + 9) × 200 = 9000。

接著觀察 2000 至 2013。可知 2000 到 2013 中，千位數共有 14 個 2，故其和為 28；十位數有 4 個 1，故其和為 4；而直接計算個位數之和為

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 2 + 3 = 51。

因此所求為 1000 + 9000 + 9000 + 9000 + 28 + 4 + 51 = 28083。

答：28083

6. 請問在數列 $\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、…中的第 2013 項是什麼？

【解】

分別觀察此數列的分母與分子，便可得知其規則：

依序分組為 1 項、2 項、3 項、…，其中第 k 組內恰有 k 項。則第 s 組內的 s 個數之分母依序為 1 遞增至 s，而分子依序為 s 遞減至 1。

因 $\frac{62\times63}{2}=1953<2013<2016=\frac{63\times64}{2}$，故知第 2013 項會位於第 63 組內，且可知第 63 組的最後一項 $\frac{1}{63}$ 為此數列的第 2016 項，所以第 2013 項是 $\frac{4}{60}$。

答：$\frac{4}{60}$

7. 依序將所有完全平方數寫成一列：14916253649…。請問第 100 位上的數碼是什麼？

【解】

一位數的完全平方數有 $1^2=1$、$2^2=4$、$3^2=9$ 這三個數，共使用了 3 個數碼；

二位數的完全平方數有 $4^2=16$、5^2、6^2、…、$9^2=81$ 這六個數，共使用了 12 個數碼；

三位數的完全平方數有 $10^2=100$、11^2、12^2、…、$31^2=961$ 這二十二個數，共使用了 66 個數碼；

至此共使用了 3 + 12 + 66 = 81 個數碼，故仍須將四位數的完全平方數繼續寫下去。因 100－81 = 19 = 4 × 4 + 3，故知第 100 位上的數碼是第五個四位數的完全平方數上的十位數。第五個四位數的完全平方數為 $36^2=1296$，故所求之數碼為 9。

答：9

8. 從 3 位女孩、6 位男孩中挑選出四位，其中至少要有一位女孩。請問共有多少種不同的挑選方法？

【解】

可知任選四位的挑選方法共有 $C_4^9=\frac{9!}{4!5!}=126$ 種，其中完全沒有女孩的挑選方式共有 $C_4^6=\frac{6!}{2!4!}=15$ 種，因此其中至少要有一位女孩的不同挑選方法共有 126－15 = 111 種。

答：111 種

9. 十三個相異正整數的總和是 2013。請問滿足上述條件的所有最小的數中的最大值是什麼？

【解】

因要求出這 13 個滿足上述條件的數中所有最小的數中的最大值，故可判斷出此最大值必發生在這 13 個數的最小值最接近平均值 $\frac{2013}{13}=154\frac{11}{13}$ 時。而觀察 13 個連續正整數之和，因其和必恰為中數的 13 倍，故若取 13 個連續正整數的中數為 154，即取這 13 個連續正整數為 148 至 160 時，總和為 2002，故可取 13 個相異正整數為 148、149、150、151、152、153、154、155、156、157、158、159、171 時，其和為 2013，且最小值 148 為所有情況中的最大值。

答：148

10. 四支隊伍參加足球賽，任意兩支隊伍都恰比賽一場，贏的隊伍得三分、平手的兩隊各得一分、輸的隊伍得零分。比賽最終結果這四支隊伍各得到 5、1、x、6 分，請問 x 之值是什麼？

【解】

不妨令 A 隊得 5 分、B 隊得 1 分、C 隊得 x 分、D 隊得 6 分。

因每一隊都各比賽 3 場，故：

由 A 隊得 5 分知 A 隊的成績必為 1 勝 2 平手；

由 B 隊得 1 分知 B 隊的成績必為 1 平手 2 負；

由 D 隊得 6 分知 D 隊的成績必為 2 勝 1 負。

因 A 隊有 2 場平手、B 隊有 1 場平手、D 隊沒有平手可知 A

隊與 B、C 隊之間的比賽結果都是平手，故 A 隊贏了 D 隊；再由 B 隊輸了 2 場可知 B 輸給了 C、D 兩隊；最後再由 D 隊贏了 2 場知 D 隊贏了 C 隊。

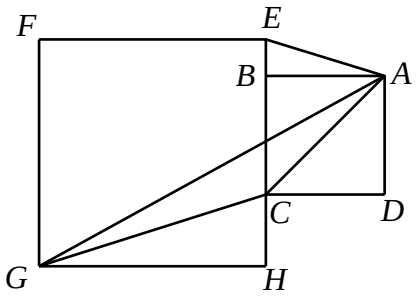
因此 C 隊成績為 1 勝 1 平手 1 負，共得積分 4 分，即 $x = 4$。

比賽的積分表如下：

隊名	A	B	C	D	積分
A	×	1	1	3	5
B	1	×	0	0	1
C	1	3	×	0	4
D	0	3	3	×	6

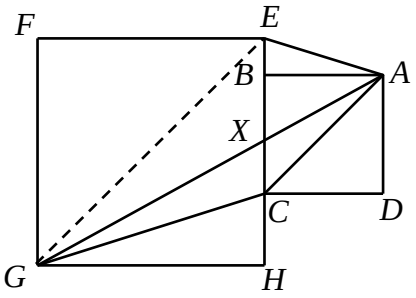
答：4

11. 在右圖中，*ABCD* 與 *EFGH* 都是正方形，邊 *BC* 在邊 *EH* 上，*ABCD* 的面積為 121 cm^2 且 *EFGH* 的面積為 441 cm^2。若已知三角形 *AGC* 的面積為 82.5 cm^2，請問三角形 *ABE* 的面積為多少 cm^2？



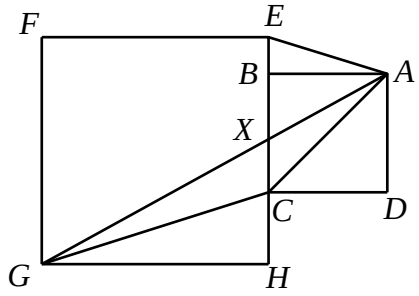
【解 1】

由 *ABCD* 的面積為 121 cm^2 且 *EFGH* 的面積為 441 cm^2 可知 *ABCD* 的邊長為 11cm 而 *EFGH* 的邊長為 21cm。不妨令 *AG* 與 *BC* 交於點 *X*，並連接 *EG*，可知 *EG*//*AC*，即 *ACGE* 為梯形，且可再進一步推知三角形 *XCG* 與三角形 *AXE* 的面積相等，因此三角形 *ACE* 的面積即為三角形 *ACG* 的面積，而三角形 *ABC* 的面積為正方形 *ABCD* 的一半，因此三角形 *ABE* 的面積為 $82.5-\frac{121}{2}=22\,cm^2$。



【解 2】

由 *ABCD* 的面積為 121 cm^2 且 *EFGH* 的面積為 441 cm^2 可知 *ABCD* 的邊長為 11cm 而 *EFGH* 的邊長為 21cm。不妨令 *AG* 與 *BC* 交於點 *X*，則由三角形 *ACG* 由三角形 *ACX* 與 *GCX* 組成可知



$$\frac{1}{2}\times CX\times 11+\frac{1}{2}\times CX\times 21=82.5=\frac{165}{2}$$

$$CX=\frac{165}{32}$$

故 $BX=11-\frac{165}{32}=\frac{187}{32}$。

再由△*ABX*～△*GHX* 知 *BX*：*XH* = *AB*：*GH* = 11：21 知

$$11XH=21BX$$

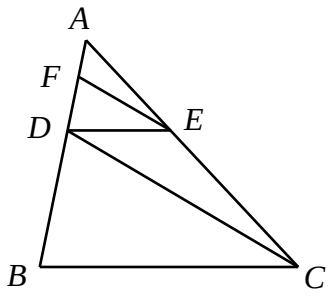
$$11(\frac{165}{32}+CH)=21\times\frac{187}{32}$$

$$CH=6$$

故 *BE* = 21－6－11 = 4，所以三角形 *ABE* 的面積為 $\frac{1}{2}\times 4\times 11=22\,cm^2$。

答：22 cm^2

12. 在下圖的三角形中，*DE*//*BC* 且 *FE*//*DC*。若 *AF* = 4 且 *FD* = 6，請問 *DB* 的長度為何？



【解】

因 *FE*//*DC*，故知 *AE*：*AC* = *AF*：*AD* = 4：4 + 6 = 2：5；

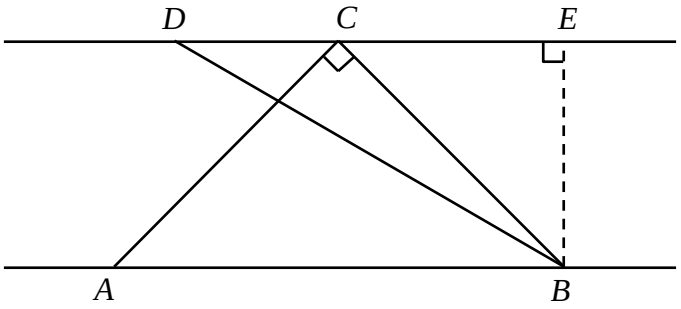
因 *DE*//*BC*，故知 *AD*：*AB* = *AE*：*AC* = 2：5，

即 AD：DB = 2：3。

再因 $AD = 4 + 6 = 10$，故可知 $DB = 10\times\frac{3}{2} = 15$。

答：15

13. 在下圖中，$AB//CD$、$\angle ACB = 90°$、$AC = BC$ 且 $AB = DB$。請問 $\angle CBD$ 為多少度？



【解】

如圖，由 B 往直線 CD 做垂線交 CD 直線於點 E。因三角形 ABC 為等腰直角三角形，故知由頂點至斜邊的垂線長度為斜邊長度的一半，即 $AB = 2BE$，亦即 $BD=2BE$。因角 E 為直角，故知 $\angle EDB = \angle DBA = 30°$，所以 $\angle CBD = 45° - 30° = 15°$。

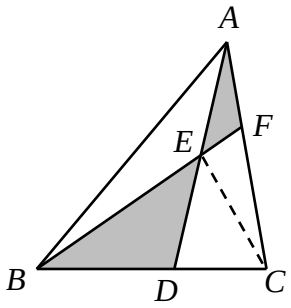
答：15°

14. 在下圖中，三角形 ABC 的面積為 32 cm^2。已知 $2BD = 3CD$ 且 $AE = DE$，請問塗上陰影部份的面積之總和為多少 cm^2？

【解】

如圖，連結 CE 並令直線 BE 與 AC 交於 F 點。

因 $2BD = 3CD$，故知 BD：CD = 3：2，因此可令三角形 BED 的面積為 $3a$、三角形 CDE 的面積為 $2a$；再由 $AE = DE$ 可得知三角形 AEB 的面積為 $3a$、三角形 AEC 的面積為 $2a$，



故三角形 ABC 的面積為 $3a + 2a + 3a + 2a = 10a = 32$ cm^2，即 $a = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$。

三角形 ABE 的面積：三角形 BEC 的面積= $3a$：$3a + 2a = 3$：5，因此可推知 AF：FC = 3：5，所以三角形 AEF 的面積為三角形 AEC 的 $\frac{3}{8}$，即 $\frac{3}{8}\times 2a = \frac{3}{4}a$。故現可推知陰影部份的面積為 $3a + \frac{3}{4}a = \frac{15}{4}a = \frac{15}{4}\times\frac{16}{5} = 12$ cm^2。

答：12 cm^2

15. 已知 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = M$ 且 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = K$，請問 M：K 等於什麼？

【解】

$$M = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$
$$= K+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$
$$= K+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)$$
$$= K+\frac{1}{4}M$$
$$\frac{3}{4}M = K$$

故知 M：K = 4：3。

答：4：3

Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
Team Contest

1. Find the greatest three-digit number $\overline{xyz}$ such that $\overline{x0yz} = 9\overline{xyz}$.

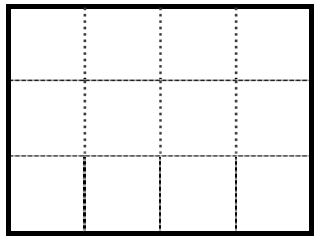
2. Write one of the operators $+, -, \times$ or $\div$ into each of the $\square$ below. How many different positive values are there for the expression

$$2 \square 2 \square 2$$

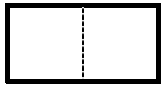
3. Let A be an integer greater than 3. The remainder of 603 divided by A is twice the remainder of 939 divided by A. This second remainder is twice the remainder of 393 divided by A. What is the number A?

4. Find x if $\frac{x}{1\times2\times3}+\frac{x}{2\times3\times4}+\frac{x}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{x}{8\times9\times10}=11$.

5. A rectangular wall measuring 3 units by 4 units is to be covered with 6 tiles of different colours, each measuring 1 unit by 2 units. In how many ways can this be done?



wall

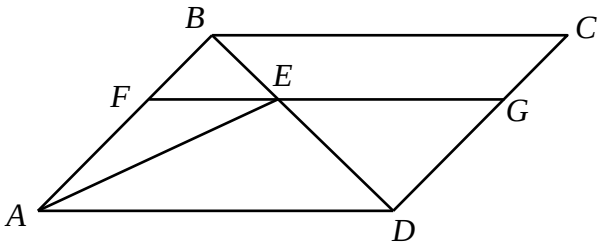


tile

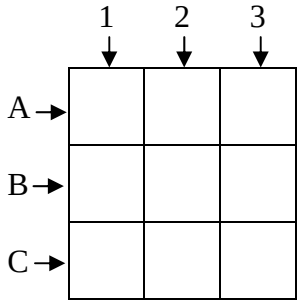
6. How many six-digit numbers of the form $\overline{ababab}$ ($a \neq b$) have exactly 32 positive divisors?

7. Five red blocks and four white blocks are to be placed in a row. At no point in the row may three or more consecutive blocks have the same color. How many such arrangements are possible?

8. In the diagram below, *ABCD* is a parallelogram. *F* and *G* are points on *AB* and *CD* respectively such that *FG* // *AD*. *FG* intersects *BD* at *E*. If the areas of triangle *AEF* and trapezium *BCGE* are 1 cm^2 and $2\frac{3}{5}$ cm^2 respectively, find the area of the parallelogram.

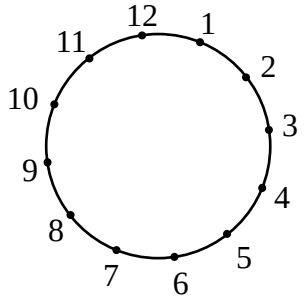


9. Solve the following cross-number puzzle.



Across
A. a prime number
B. a prime number
C. a cube
Down
1. a cube
2. a square
3. a square

10. The circle below has twelve points evenly spaced on its circumference. How many triangles can you make by connecting the points with the following property: the sum of the numbers on the vertices of the triangle created has at least 3 factors greater than 1?



Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
第 16 屆小學數學世界邀請賽隊際競賽試題

1. 請問滿足 $\overline{x0yz}=9\overline{xyz}$ 的最大三位數 $\overline{xyz}$ 是什麼？

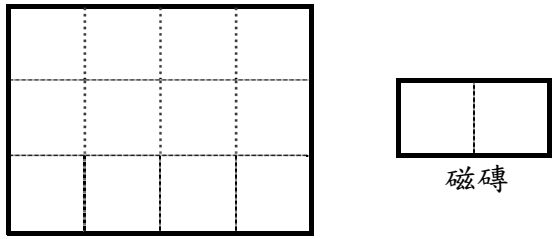
2. 將運算符號 ＋、－、×或÷填入底下算式的□中，請問共可得到多少個不同的正值？

$$2\square 2\square 2$$

3. 令 A 為大於 3 之正整數。已知 603 除以 A 所得之餘數是 939 除以 A 所得之餘數的兩倍、939 除以 A 所得之餘數是 393 除以 A 所得之餘數的兩倍。請問正整數 A 之值是什麼？

4. 已知 $\frac{x}{1\times2\times3}+\frac{x}{2\times3\times4}+\frac{x}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{x}{8\times9\times10}=11$，請問 x 的值是多少？

5. 用六片 1×2 不同顏色的磁磚將 3×4 的矩形牆鋪滿。請問共有多少種不同的鋪法？

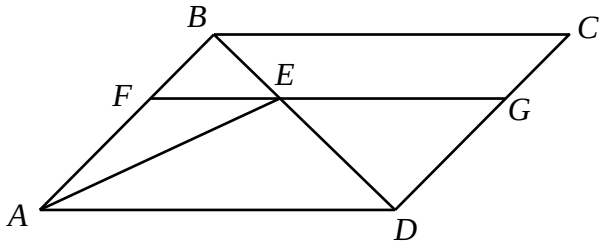

牆

磁磚

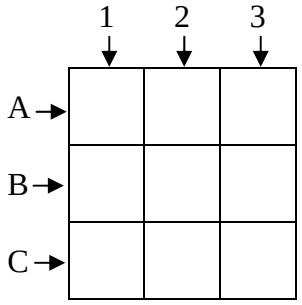
6. 具有 $\overline{ababab}$ (其中 $a\neq b$)形式的六位數中，請問共有多少個數恰有 32 個正因數？

7. 五塊紅色磚頭與四塊白色磚頭排成一列，不允許有任何三塊或三塊以上同色的磚頭相連在一起。請問共有多少種不同的排法？

8. 在下圖中，*ABCD* 為平行四邊形，點 *F* 與點 *G* 分別在 *AB* 與 *CD* 上使得 *FG*//*AD*，且 *FG* 與 *BD* 相交於點 *E*。已知三角形 *AEF* 與梯形 *BCGE* 的面積分別為 1 cm^2 與 $2\frac{3}{5}$ cm^2，請問 *ABCD* 之面積為多少 cm^2？



9. 完成以下的填數遊戲。



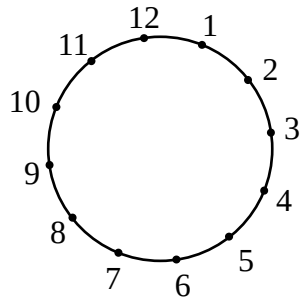
橫

A. 為一個三位數的質數
B. 為一個三位數的質數
C. 為一個三位數的立方數

直

1. 為一個三位數的立方數
2. 為一個三位數的平方數
3. 為一個三位數的平方數

10. 將數 1～12 分別填在圓周的十二個點上，連接其中三點構成一個三角形，使得三角形三個頂點上的數之總和至少有三個大於 1 的正因數。請問共有多少個不同的三角形滿足上述條件？



Po Leung Kuk 16th Primary Mathematics World Contest
第 16 屆小學數學世界邀請賽隊際競賽試題詳解

1. 請問滿足 $\overline{x0yz}=9\overline{xyz}$ 的最大三位數 $\overline{xyz}$ 是什麼？

【解】

可將算式寫成如下乘式：

$$\begin{array}{r} x\ \ y\ \ z \\ \times\qquad\ \ 9 \\ \hline x\ \ 0\ \ y\ \ z \end{array}$$

由個位數碼的部分可判斷出 $z=5$，且可據此得知 $9y+4$ 的個位數碼為 y，因此 $y=2$ 或 7。

若 $y=2$，則可再據此得知 $9x+2$ 的個位數碼為 0、十位數碼為 x，因此 $x=2$。所以 $\overline{xyz}=225$。

若 $y=7$，則可再據此得知 $9x+6$ 的個位數碼為 0、十位數碼為 x，因此 $x=6$。所以 $\overline{xyz}=675$。

答：675

2. 將運算符號＋、－、×或÷填入底下算式的□中，請問共可得到多少個不同的正值？

$$2\ \square\ 2\ \square\ 2$$

【解 1】

兩個□內填入運算符號共有以下 16 種不同的算式：

$2+2+2=6$、$2+2-2=2$、$2+2\times 2=6$、$2+2\div 2=3$、
$2-2+2=2$、$2-2-2<0$、$2-2\times 2<0$、$2-2\div 2=1$、
$2\times 2+2=6$、$2\times 2-2=2$、$2\times 2\times 2=8$、$2\times 2\div 2=2$、
$2\div 2+2=3$、$2\div 2-2<0$、$2\div 2\times 2=2$、$2\div 2\div 2=\frac{1}{2}$。

合計共有 $\frac{1}{2}$、1、2、3、6、8 這 6 個不同的正值。

【解 2】

若二個□同時填入相同的運算符號，可得到以下 3 個不同的正值：

$$2+2+2=6$$
$$2\times 2\times 2=8$$
$$2\div 2\div 2=\frac{1}{2}$$

若二個□填入不同的運算符號，可得到以下 4 個不同的正值：

$2+2-2=2-2+2=2\times 2\div 2=2\div 2\times 2=2\times 2-2=2$

$2+2\times 2=2\times 2+2=6$

$2+2\div 2=2\div 2+2=3$

$2-2\div 2=1$

合計共有 $\frac{1}{2}$、1、2、3、6、8 這 6 個不同的正值。

答：6 個

3. 令 A 為大於 3 之正整數。已知 603 除以 A 所得之餘數是 939 除以 A 所得之餘數的兩倍、939 除以 A 所得之餘數是 393 除以 A 所得之餘數的兩倍。請問正整數 A 之值是什麼？

【解 1】

由題意可知

939×2 與 603 除以 A 所得之餘數相同；

393×2 與 939 除以 A 所得之餘數相同。

故 A 必為 $939\times 2-603=1275$ 與 $393\times 2-939=153$ 的公因數，且因 A 為大於 3 之正整數，故知 $A=17$ 或 51。

若 $A=51$，則 $939=51\times 18+21$，餘數非偶數，故不合。

因此 $A=17$，且有

$$603=17\times 35+8$$
$$939=17\times 55+4$$
$$393=17\times 23+2$$

【解 2】

由題意可知存在正整數 x、y、z、r 使得

$$603 = Ax + 4r$$
$$939 = Ay + 2r$$
$$393 = Az + r$$

故可知：

$A(y-2z) = 939 - 2\times 393 = 153 = 3\times 3\times 17$ 、

$A(2y-x) = 2\times 939 - 603 = 1275 = 3\times 5\times 5\times 17$ 、

$A(4z-x) = 4\times 393 - 603 = 969 = 3\times 17\times 19$ ；

因此可判斷出 A 必為 153、969、1275 的公因數，且因 A 為大於 3 之正整數，故知 $A = 17$ 或 51。

若 $A = 51$，則 $603 = 51\times 11 + 42$，但 42 不為 4 的倍數，故不合。

因此 $A = 17$，且有

$$603 = 17\times 35 + 8$$
$$939 = 17\times 55 + 4$$
$$393 = 17\times 23 + 2$$

答：17

4. 已知 $\frac{x}{1\times 2\times 3}+\frac{x}{2\times 3\times 4}+\frac{x}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{x}{8\times 9\times 10}=11$，請問 x 的值是多少？

【解 1】

$$11=\frac{x}{1\times 2\times 3}+\frac{x}{2\times 3\times 4}+\frac{x}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{x}{8\times 9\times 10}$$
$$\frac{11}{x}=\frac{2^3\times 3\times 5\times 7+2\times 3\times 5\times 7+2^2\times 3\times 7+2\times 3\times 7+2^3\times 3+3\times 5+2\times 5+7}{2^4\times 3^2\times 5\times 7}$$
$$\frac{11}{x}=\frac{1232}{2^4\times 3^2\times 5\times 7}$$
$$x = 45$$

【解 2】觀察可知

$$\frac{1}{(n-1)\times n\times (n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

故

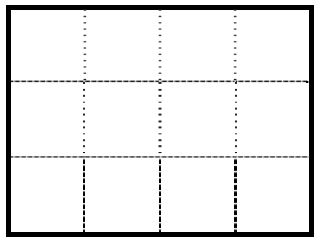
$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{1}{8\times 9\times 10}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)\right]$$
$$=\frac{11}{45}$$

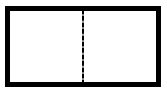
所以

$$11=\frac{x}{1\times 2\times 3}+\frac{x}{2\times 3\times 4}+\frac{x}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{x}{8\times 9\times 10}=\frac{11}{45}x$$
$$x = 45$$

答：45

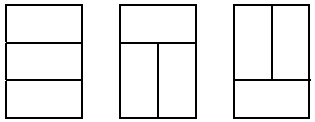
5. 用六片 1×2 不同顏色的磁磚將 3×4 的矩形牆鋪滿。請問共有多少種不同的鋪法？


牆

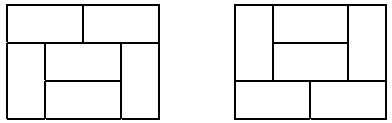

磁磚

【解】

一塊 3 × 4 的區域可分成兩塊 3 × 2 的區域，而有如圖所示的 3 種方法可用 3 片 1 × 2 的磁磚來鋪成一塊 3 × 2 的區域。



從這 3 種拼法中可重複的選取兩種拼法後左右並列即可得到一塊 3 × 4 的區域，如此可得到 3 × 3 = 9 種拼法，再加上如下圖所示的兩種拼法，共有 9 + 2 = 11 種拼法。



而每一種拼法中的六片磁磚顏色都不相同，故每一種拼法可對應出 6! = 720 種不同的鋪法，故一共有 11 × 720 = 7920 種不同的鋪法。

答：7920 種

6. 具有 $\overline{ababab}$ (其中 $a \neq b$)形式的六位數中，請問共有多少個數恰有 32 個正因數？

【解】

可知 $\overline{ababab} = \overline{ab} \times 10101$，而 $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ 共有 $2^4 = 16$ 個因數，故由 $\overline{ab}$ 為二位數且 $a \neq b$ 可判斷出 $\overline{ab}$ 為 $7^2 = 49$ 或二位數的質數，但不可為 11、13、37，因此 $\overline{ab}$ 共有 17、19、23、29、31、41、43、47、49、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97 這 19 個不同的取值，即共有 19 個這樣的六位數恰有 32 個正因數。

答：19 種

7. 五塊紅色磚頭與四塊白色磚頭排成一列，不允許有任何三塊或三塊以上同色的磚頭相連在一起。請問共有多少種不同的排法？

【解】

不妨令紅色磚頭為 R、白色磚頭為 W。此即為在四個 W 的五個間隔中(含第一個 W 之前的空隙與第四個之後的空隙)填入 R 而滿足題意：

空隙 1　W　空隙 2　W　空隙 3　W　空隙 4　W　空隙 5

可知每一個空隙至多填入 2 個 R。

若每一個空隙至多填入 1 個 R，則可推知每一個空隙都要填入一個 R，即僅 1 種填法；

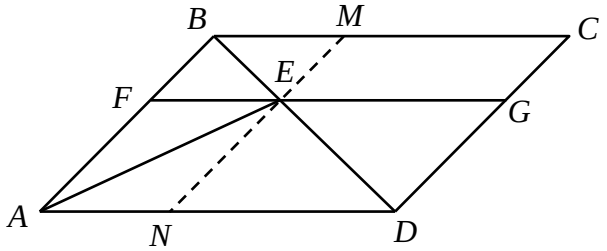
若恰有一個空隙填入 2 個 R，則另外有三個空隙要填入 R、一個空隙不填入 R，即共有 $C_1^5 \times C_3^4 = 5 \times 4 = 20$ 種填法；

若恰有二個空隙填入 2 個 R，則另外有一個空隙要填入 R、二個空隙不填入 R，但是空隙 2 與空隙 3 不能同時不填入 R 或 RR、空隙 3 與空隙 4 不能同時不填入 R 或 RR，因為這二類填法會造成三個 W 連在一起而不滿足題意，因此共有 $(C_3^5 - 2) \times 3 = 8 \times 3 = 24$ 種填法。

故知共有 1 + 20 + 24 = 45 種不同的排法。

答：45 種

8. 在下圖中，*ABCD* 為平行四邊形，點 *F* 與點 *G* 分別在 *AB* 與 *CD* 上使得 *FG*//*AD*，且 *FG* 與 *BD* 相交於點 *E*。已知三角形 *AEF* 與梯形 *BCGE* 的面積分別為 1 cm^2 與 $2\frac{3}{5}$ cm^2，請問 *ABCD* 之面積為多少 cm^2？



【解】

如圖，過 E 點作 $MN//AB$ 分別交 BC、AD 於點 M、N。此時由平行四邊形的性質可推知

三角形 BEM 的面積 = 三角形 BEF 的面積、

三角形 EDG 的面積 = 三角形 EDN 的面積、

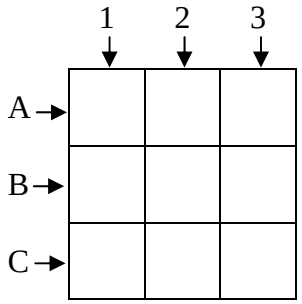
三角形 ABD 的面積 = 三角形 BCD 的面積。

故知平行四邊形 $AFEN$ 與平行四邊形 $CGEM$ 的面積相等，三角形 AEN 的面積 = 三角形 AEF 的面積 $=1\ \text{cm}^2$，所以平行四邊形 $CGEM$ 的面積為 $2\ \text{cm}^2$，因此三角形 BEM 的面積=三角形 BEF 的面積$=2\frac{3}{5}-2=\frac{3}{5}\ \text{cm}^2$，故 $BF:AF=\frac{3}{5}:1=3:5$，

因此可得 $ABCD$ 之面積為 $(2\frac{3}{5}+\frac{3}{5})\times\frac{3+5}{3}=\frac{128}{15}=8\frac{8}{15}\ \text{cm}^2$。

答：$\frac{128}{15}=8\frac{8}{15}\ \text{cm}^2$

9. 完成以下的填數遊戲。



橫

A. 為一個三位數的質數

B. 為一個三位數的質數

C. 為一個三位數的立方數

直

1. 為一個三位數的立方數
2. 為一個三位數的平方數
3. 為一個三位數的平方數

【解】

令九宮格的每一個位置之代號如下所示：

A1	A2	A3
B1	B2	B3
C1	C2	C3

現觀察所有三位數的完全立方數：125、216、343、512、729。可知 C1 必為一個立方數的個位數碼及另一個立方數的百位數碼，因此知 C1=2、3 或 5，即以下三種可能的情況：

5		
1		
2	1	6

3		
4		
3	4	3

1		
2		
5	1	2

接著觀察完全平方數的個位數碼，其值必為 1、4、9、6 或 5，故知 C3 的可能值即為 1、4、9、6 或 5，因此後兩種情況必不可發生，即：

5		
1		
2	1	6

而三位數中，個位數碼為 6 的完全平方數有 196、256、576 及 676，其中僅 196 可同時使 A3、B3 為質數的個位數碼，故知：

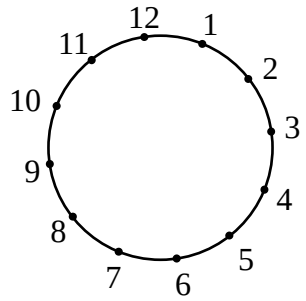
5		1
1		9
2	1	6

而三位數中，個位數碼為 1 的完全平方數有 121、361、441、841 及 961，但由 $129=3\times43$、$169=13\times13$ 及 $581=7\times83$ 知僅 441 可使 A 列為質數，故知：

5	4	1
1	4	9
2	1	6

而 149 也是質數，故以上填數方式滿足題意。

10. 將數 1～12 分別填在圓周的十二個點上，連接其中三點構成一個三角形，使得三角形三個頂點上的數之總和至少有三個大於 1 的正因數。請問共有多少個不同的三角形滿足上述條件？



【解 1】

若令所取出的三角形頂點數之和為 S，則知：

$$1+2+3=6\le S\le 10+11+12=33$$

因 S 至少有三個大於 1 的正因數，故知 S 的質因數分解式之形式不可為 p 或 p^2，其中 p 為質數，即 S 不可為 7、9、11、13、17、19、23、25、29 或 31。

若 $S=7$，則三個頂點上的數為(1, 2, 4)，共 1 個三角形；

若 $S=9$，則三個頂點上的數為(1, 2, 6)、(1, 3, 5)、(2, 3, 4)，共 3 個三角形；

若 $S=11$，則三個頂點上的數為(1, 2, 8)、(1, 3, 7)、(1, 4, 6)、(2, 3, 6)、(2, 4, 5)，共 5 個三角形；

若 $S=13$，則三個頂點上的數為(1, 2, 10)、(1, 3, 9)、(1, 4, 8)、(1, 5, 7)、(2, 3, 8)、(2, 4, 7)、(2, 5, 6)、(3, 4, 6)，共 8 個三角形；

若 $S=17$，則三個頂點上的數為(1, 4, 12)、(1, 5, 11)、(1, 6, 10)、(1, 7, 9)、(2, 3, 12)、(2, 4, 11)、(2, 5, 10)、(2, 6, 9)、(2, 7, 8)、(3, 4, 10)、(3, 5, 9)、(3, 6, 8)、(4, 5, 8)、(4, 6, 7)，共 14 個三角形；

若 $S=19$，則三個頂點上的數為(1, 6, 12)、(1, 7, 11)、(1, 8, 10)、(2, 5, 12)、(2, 6, 11)、(2, 7, 10)、(2, 8, 9)、(3, 4, 12)、(3, 5, 11)、(3, 6, 10)、(3, 7, 9)、(4, 5, 10)、(4, 6, 9)、(4, 7, 8)、(5, 6, 8)，共 15 個三角形；

若 $S=23$，則三個頂點上的數分別為(1, 10, 12)、(2, 9, 12)、(2, 10, 11)、(3, 8, 12)、(3, 9, 11)、(4, 7, 12)、(4, 8, 11)、(4, 9, 10)、(5, 6, 12)、(5, 7, 11)、(5, 8, 10)、(6, 7, 10)、(6, 8, 9)，共 13 個三角形；

若 $S=25$，則三個頂點上的數分別為(2, 11, 12)、(3, 10, 12)、(4, 9, 12)、(4, 10, 11)、(5, 8, 12)、(5, 9, 11)、(6, 7, 12)、(6, 8, 11)、(6, 9, 10)、(7, 8, 10)，共 10 個三角形；

若 $S=29$，則三個頂點上的數分別為(6, 11, 12)、(7, 10, 12)、(8, 9, 12)、(8, 10, 11)，共 4 個三角形；

若 $S=31$，則三個頂點上的數為(8, 11, 12)、(9, 10, 12)，共 2 個三角形；

以上合計共 $1+3+5+8+14+15+13+10+4+2=75$，而從 12 個點中任取三點的取法共有 $C_3^{12}=220$ 個，因此共有 $220-75=145$ 個不同的三角形滿足題意。

【解 2】

若令所取出的三角形頂點數之和為 S，則知：

$$1+2+3=6\le S\le 10+11+12=33$$

因 S 至少有三個大於 1 的正因數，故知 S 的質因數分解式之形式不可為 p 或 p^2，其中 p 為質數，即 S 只可為 6、8、10、12、14、15、16、18、20、21、22、24、26、27、28、30、32 或 33。

若 $S=6$，則三個頂點上的數為(1, 2, 3)，共 1 個三角形；

若 $S=8$，則三個頂點上的數為(1, 2, 5)、(1, 3, 4)，共 2 個三角形；

若 $S=10$，則三個頂點上的數為(1, 2, 7)、(1, 3, 6)、(1, 4, 5)、(2, 3, 5)，共 4 個三角形；

若 $S=12$，則三個頂點上的數為(1, 2, 9)、(1, 3, 8)、(1, 4, 7)、(1, 5, 6)、(2, 3, 7)、(2, 4, 6)、(3, 4, 5)，共 7 個三角形；

若 $S=14$，則三個頂點上的數為(1, 2, 11)、(1, 3, 10)、(1, 4, 9)、(1, 5, 8)、(1, 6, 7)、(2, 3, 9)、(2, 4, 8)、(2, 5, 7)、(3, 4, 7)、(3, 5, 6)，共 10 個三角形；

若 $S = 15$，則三個頂點上的數為(1, 2, 12)、(1, 3, 11)、(1, 4, 10)、(1, 5, 9)、(1, 6, 8)、(2, 3, 10)、(2, 4, 9)、(2, 5, 8)、(2, 6, 7)、(3, 4, 8)、(3, 5, 7)、(4, 5, 6)，共 12 個三角形；
若 $S = 16$，則三個頂點上的數為(1, 3, 12)、(1, 4, 11)、(1, 5, 10)、(1, 6, 9)、(1, 7, 8)、(2, 3, 11)、(2, 4, 10)、(2, 5, 9)、(2, 6, 8)、(3, 4, 9)、(3, 5, 8)、(3, 6, 7)、(4, 5, 7)，共 13 個三角形；
若 $S = 18$，則三個頂點上的數為(1, 5, 12)、(1, 6, 11)、(1, 7, 10)、(1, 8, 9)、(2, 4, 12)、(2, 5, 11)、(2, 6, 10)、(2, 7, 9)、(3, 4, 11)、(3, 5, 10)、(3, 6, 9)、(3, 7, 8)、(4, 5, 9)、(4, 6, 8)、(5, 6, 7)，共 15 個三角形；
若 $S = 20$，則三個頂點上的數為(1, 7, 12)、(1, 8, 11)、(1, 9, 10)、(2, 6, 12)、(2, 7, 11)、(2, 8, 10)、(3, 5, 12)、(3, 6, 11)、(3, 7, 10)、(3, 8, 9)、(4, 5, 11)、(4, 6, 10)、(4, 7, 9)、(5, 6, 9)、(5, 7, 8)，共 15 個三角形；
若 $S = 21$，則三個頂點上的數為(1, 8, 12)、(1, 9, 11)、(2, 7, 12)、(2, 8, 11)、(2, 9, 10)、(3, 6, 12)、(3, 7, 11)、(3, 8, 10)、(4, 5, 12)、(4, 6, 11)、(4, 7, 10)、(4, 8, 9)、(5, 6, 10)、(5, 7, 9)、(6, 7, 8)，共 15 個三角形；
若 $S = 22$，則三個頂點上的數分別為(1, 9, 12)、(1, 10, 11)、(2, 8, 12)、(2, 9, 11)、(3, 7, 12)、(3, 8, 11)、(3, 9, 10)、(4, 6, 12)、(4, 7, 11)、(4, 8, 10)、(5, 6, 11)、(5, 7, 10)、(5, 8, 9)、(6, 7, 9)，共 14 個三角形；
若 $S = 24$，則三個頂點上的數分別為(1, 11, 12)、(2, 10, 12)、(3, 9, 12)、(3, 10, 11)、(4, 8, 12)、(4, 9, 11)、(5, 7, 12)、(5, 8, 11)、(5, 9, 10)、(6, 7, 11)、(6, 8, 10)、(7, 8, 9)，共 12 個三角形；
若 $S = 26$，則三個頂點上的數分別為(3, 11, 12)、(4, 10, 12)、(5, 9, 12)、(5, 10, 11)、(6, 8, 12)、(6, 9, 11)、(7, 8, 11)、(7, 9, 10)，共 8 個三角形；
若 $S = 27$，則三個頂點上的數分別為(4, 11, 12)、(5, 10, 12)、(6, 9, 12)、(6, 10, 11)、(7, 8, 12)、(7, 9, 11)、(8, 9, 10)，共 7 個三角形；

若 $S = 28$，則三個頂點上的數分別為(5, 11, 12)、(6, 10, 12)、(7, 9, 12)、(7, 10, 11)、(8, 9, 11)，共 5 個三角形；
若 $S = 30$，則三個頂點上的數分別為(7, 11, 12)、(8, 10, 12)、(9, 10, 11)，共 3 個三角形；
若 $S = 32$，則三個頂點上的數為(9, 11, 12)，共 1 個三角形；
若 $S = 33$，則三個頂點上的數為(10, 11, 12)，共 1 個三角形；
以上合計共 1 + 2 + 4 + 7 + 10 + 12 + 13 + 15 + 15 + 15 + 14 + 12 + 8 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 145 個不同的三角形滿足題意。

答：145 個